אלגברה

מכינת הטכניון

נוסחות הכפל והפירוק

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \qquad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

לכל n טבעי :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+b^{n-1}\right)$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)\left(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\dots+b^{2n}\right)$$

משוואה ריבועית

$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

שורשי המשוואה הריבועית

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-ac}}{a}$$

נוסחות Vieta

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

לוגריתם

$\log_a b \quad a,b>0\ ,\ a\neq 1$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a^{\log_a b}=b \qquad \log_a a^c=c$$

סדרה חשבונית (אריתמטית)

נוסחת האיבר ה-n-י

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

נוסחת הסכום של n האיברים הראשונים

$$S_n=\{2a_1+(n-1)d\}\cdot\frac{n}{2}=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}$$

סדרה גיאומטרית

נוסחת האיבר ה-n-י

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

נוסחת הסכום של n האיברים הראשונים

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$$

נוסחת הסכום של טור גיאומטרי-אינסופי מתכנס

$$S=\frac{a_1}{1-q} \qquad |q|<1$$

קומבינטוריקה

מספר **התמורות** (בלי חזרות)

$$P_n=n!\ ,\ (0!=1)$$

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

מספר **החליפות** של k מתוך n עצמים שונים (בלי חזרות)

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר **החליפות** של k מתוך n עצמים שונים (עם חזרות)

$$n^k$$

מספר **הצירופים** של k מתוך n עצמים שונים (בלי חזרות)

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,\ \left(C_n^0=C_n^n=1\ ,\ C_n^k=C_n^{n-k}\right)$$

בינום ניוטון

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\dots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

האיבר הכללי

$$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$$

מספרים מרוכבים

$$i^2=-1$$

$$z=a+ib=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\equiv r\,\mathrm{cis}\alpha\ ,\ r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}\ ,\ tg\alpha=\frac{b}{a}$$

נוסחת De-Moivre

$$z=[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{cis}\frac{a+2\pi k}{n}\ ,\ k=0,1,\dots,n-1$$

$$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z) \qquad z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)i$$

לכל n טבעי

$$\overline{z_1\pm z_2\pm\dots\pm z_n}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2\pm\dots\pm\bar{z}_n$$

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2 \qquad \overline{z_1\cdot z_2\cdot\dots\cdot z_n}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\dots\cdot\bar{z}_n$$

לכל n טבעי

$$\left[\overline{z^n}=(\bar{z})^n \quad \text{ה פרטי}\right]$$

$$|z_1\cdot z_2\cdot\dots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\dots\cdot|z_n|$$

לכל n טבעי

$$\left[|z^n|=|z|^n \quad \text{ה פרטי}\right]$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \qquad \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|} \qquad w\neq 0$$

פולינומים ושורשיהם $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

נוסחת השארית: $P(x)=(x-a)Q(x)+R \Rightarrow R=P(a)$

משפט הריבוי: $P_n(x)$ מתחלק ללא שארית ב- $(x-a)^k$ $2\le k<n$ ואינו מתחלק ב-$(x-a)^{k+1}$ אוי"א

$$P_n(a)=0\ ,\ P_n{}'(a)=0\ ,\ P_n{}''(a)=0\ ,\ \dots\ ,\ P_n^{(k-1)}(a)=0\ ,\ P_n^{(k)}(a)\neq 0$$

משפט השורש הרציונלי: א. אם $a_0,a_1,\dots,a_n$ מס' שלמים ואם ל- $P_n(x)$ יש שורש רציונלי מצומצם $\frac{p}{q}$ אזי

a_0 מתחלק ב-p ו- a_n מתחלק ב-q.

נוסחות Vieta המורחבות: נניח ש- $x_1,x_2,\dots,x_n$ כל שורשי $P_n(x)$ ממעלה n אזי

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n} \qquad x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n} \qquad x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$