מכינת הטכניון

תרגילים בגיאומטרית המישור - אסף פרופ' שמואל זקס

מנקודה עד מעגל

1) במשולש ABC AD הוא תיכון ו- AE גובה.
G ו-F אמצעי הצלעות AC ו- AB בהתאמה.
הוכח כי: א. $\angle FDG=\angle BAC$ ב. $\angle FEG=\angle BAC$

2) א. $ABCD$ מקבילית. E אמצע AB ו- F אמצע AD.
הוכח כי CE ו- CF מחלקים את האלכסון BD לשלושה חלקים שווים.
ב. במשולש ABC העבירו שני גבהים BK ו- CL.
הוכח כי המשולש TKL שווה-שוקיים, כאשר T אמצע BC.

3) נתון משולש ABC. על הצלעות AB ו- AC בונים שני משולשים שווי-צלעות:
ABP ו- ACR, המונחים מחוץ למשולש ABC.
I נקודת החיתוך של PC ו- BR. הוכח כי $\angle PIR=120^\circ$.

4) במשולש שווה-צלעות ABC, קבעו על המשכי הצלעות BC ו- CA את הנקודות D ו- E בהתאמה,
כך ש- $CD=AE=AB$.
הישר DE חותך את AB ב- F. הוכח כי $AF=\frac{1}{3}AB$.

5) K ו- L הם אמצעי הצלעות AC ו- AB במשולש ABC, בהתאמה.
D נקודה של AC כך ש- $KD=AL$ (D נמצאת בין K ל- C).
הוכח כי האנך מ- D אל חוצה הזווית A, חוצה את BC.

6) הוכח כי במשולש סכום התיכונים גדול מ - $3/4$ סכום הצלעות, וקטן מסכום הצלעות.

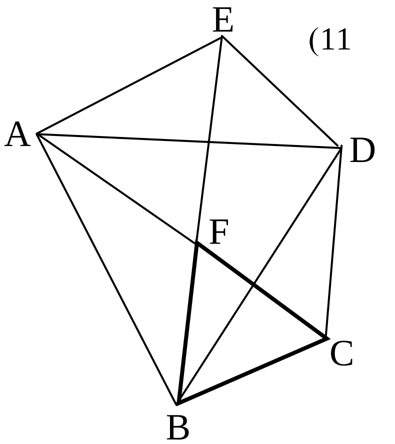
7) במקבילית $ABCD$ האלכסונים נפגשים בנקודה M.
האנך ל- BD ב- M חותך את AB ב- E, את DC ב- F ואת המשך BC ב- G.
הוכח כי: א. $BG=DG$ ב. $MF=ME$ ג. המרובע $EBFD$ הוא מעוין.

8) מקבילית $ABCD$ חוסמת מקבילית $MNPR$, באופן שקדקודי השנייה נמצאים על צלעות הראשונה,
אחד על כל צלע. הוכח כי אלכסוני שתי המקביליות עוברים דרך נקודה אחת.

9) $ABCD$ מקבילית. האנכים מ- A ומ- C אל האלכסון BD חותכים אותו בנקודות E ו- F בהתאמה.
מקדקודים B ו- D הורידו אנכים על האלכסון AC החותכים אותו בנקודות G ו- H בהתאמה.
א. הוכח כי המרובע $EHFG$ הוא מקבילית.
ב. מה אפשר לומר על המרובע $EHFG$ כשהמקבילית $ABCD$ היא מלבן?

10) גובהי המשולש ABC נפגשים בנקודה H.
נסמן ב- K,L,M,N את אמצעי הקטעים AB,AC,BH,CH, בהתאמה.
הוכח כי $KLNM$ מלבן.

(11



11) המשולשים: BCF, ABD, ו- AEF הם משולשים שווי-צלעות.
הוכח כי: א. $\Delta ADE\cong\Delta ABF$ ב. $DE=BC$
ג. המרובע $CDEF$ הוא מקבילית.

12) במעוין $ABCD$ $\angle A=45^\circ$.
ממשיכים את הגובה מ- B ל- AD כך ש- $BE=AB$ (E על המשך הגובה).
הוכח: א. $AE=BD$ ב. E,D,C על ישר אחד.

13) הוכח שאם במשולש ABC קיים $BC=2AC$,
אז התיכון AK חוצה את הזווית שבין AB לבין התיכון AL במשולש
AKC.

14) על הצלעות AB ו- AC של משולש ABC בנו כלפי חוץ את הריבועים $ABDE$ ו- $ACFG$.
הוכח שהקטע EG מאונך לתיכון ל- BC ושווה לפעמיים אותו התיכון.

המעגל

15) הוכח כי כל שניים משלושת המעגלים, הבנויים על צלעות משולש כקטרים, נפגשים על אחת מצלעות המשולש.

16) נתון מעגל O ונקודה P מחוצה לו. כמו כן, מסומן קוטר המעגל, ש-P אינה עליו או על המשכו. בנה באמצעות סרגל בלבד אנך לקוטר דרך P.

17) משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל.
חוצי-זוויות הבסיס נפגשים בנקודה M, וחותכים את המעגל בנקודות K ו- L.
הוכח כי המרובע $AKML$ הוא מעוין.

18) המיתרים AB ו- CD מאונכים זה לזה וחותכים זה את זה.
הוכח כי מרחק AC מהמרכז שווה ל- $\frac{1}{2}BD$, ומרחק BD מהמרכז שווה ל- $\frac{1}{2}AC$.

19) במשולש ABC בנו על הצלע BC (כקוטר) מעגל, החותך את הצלעות AC ו- AB בנקודות D ו- E בהתאמה. EC ו- BD נחתכים ב- K. $\angle EKB = 60^\circ$, M היא אמצע BC.
הוכח כי: א. המשולש EMD הוא שווה-צלעות.
ב. הישרים AK ו- BC מאונכים זה לזה.

20) הוכח כי חוצה-הזווית A, והאנך האמצעי לצלע BC במשולש ABC, נפגשים על המעגל החוסם את המשולש.

21) ABC משולש שווה-צלעות, החסום במעגל O. M נקודה כלשהי על BC.
D נקודה על המעגל באופן ש- $AM \| CD$. AM חותך את BD ב- E.
הוכח: א. ΔMEB שווה-צלעות. ב. המרובע $CMED$ הוא מקבילית. ג. $AM = BM + CM$.

22) במשולש ABC הועברו הגבהים AD, BE, CF והם נפגשים ב- H.
מעבירים את המעגל החוסם את המשולש HBC ואת המעגל החוסם את המשולש HBA.
מעבירים אנך ל- HB ב- B, והוא חותך את שני המעגלים בנקודות K ו- L.
הוכח: א. $HK = HL$. ב. המעגלים שווי מחוג.

23) בטרפז $ABCD$ נחתכות השוקיים AD ו- BC בנקודה E.
הוכח כי המעגלים ABE ו- CDE משיקים זה לזה בנקודה E.

24) משולש ABC נתון כי $\angle B = 90^\circ$. על AB, כקוטר, בונים מעגל.
המקביל ל- AC, דרך B, חותך את המעגל ב- D. CD חותך את המעגל ב- N.
הוכח כי $\angle NCA = \angle NBC = \angle NAB$.

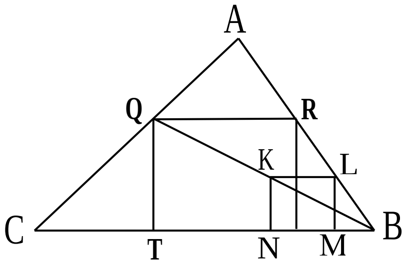
25) שני מעגלים לא שווים, נפגשים ב- A וב- B.
משיק לאחד המעגלים דרך A, חותך את המעגל השני ב- C.
המשיק דרך A למעגל השני, חותך את המעגל הראשון ב- D.
ישר דרך A חותך את המעגל ABC ב- E, ואת המעגל ABD ב- F.
EC ו- FD נפגשים ב- G.
הוכח כי המשולש EFG שווה-שוקיים.

26) הוכח כי אם במרובע סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות, אזי ניתן לחסום בו מעגל.

27) נתון קוטר AB של מעגל O. C נקודה על המשיק למעגל ב- B.
דרך C מעבירים משיק CT (T על המעגל). האנך ל- AB ב- O חותך את AT ב- D.
הוכח כי $OCDT$ (או $OCTD$) טרפז שווה-שוקיים.

28) הוכח כי במשולש ישר-זווית, סכום הניצבים שווה לסכום הקטרים של המעגל החוסם ושל המעגל החסום.

29) נתון מעגל שקוטרו AB. מנקודה M על המעגל חגו מעגל נוסף המשיק ל-AB בנקודה T.
מ-A ומ-B העבירו משיקים AR ו-BQ למעגל הנוסף שמרכזו M. הוכח כי $BQ \| AR$.

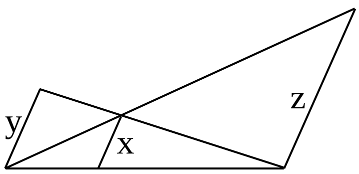


30) במשולש ABC בונים ריבוע קטן $KLMN$.
Q היא נקודת החיתוך של המשך BK עם AC.
מעבירים דרך Q מקבילים לצלעות הריבוע $KLMN$.
הוכח כי $QRST$ ריבוע.

31) במשולש נתונות הצלעות $AB=c$, $AC=b$, ורדיוס המעגל החוסם R.
חשב את הגובה לצלע BC באמצעות c,b ו- R.

32) השוקיים AD ו- BC של טרפז $ABCD$ נמשכו עד לפגישתן בנקודה G.
דרך G, הועבר ישר המקביל לבסיסי הטרפז.
המשכי האלכסונים AC ו- BD חותכים מקביל זה בנקודות F ו- E בהתאמה.
מצא את אורך הקטע EF, אם נתון שאורכי בסיסי הטרפז הם $AB=a$, $CD=b$.

33) א. נתון מעוין $ABCD$ שצלעו a.
דרך A העבירו ישר כלשהו החותך את המשכי הצלעות CB ו- CD בנקודות E ו- F, בהתאמה.
הוכח כי $\frac{1}{a}=\frac{1}{CF}+\frac{1}{CE}$.
ב. D היא אמצע הצלע BC במשולש ABC.
חוצה-הזווית ADB חותך את AB ב- E, וחוצה-הזווית ADC חותך את AC ב- F.
הוכח כי $EF\parallel BC$.



34) א. בשרטוט ידוע כי שלושת הקטעים x, y ו- z מקבילים.
הוכח כי: $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.
ב. נתון משולש ABC, $AB=6, AC=8, \angle A=120^\circ$.
חשב את אורך חוצה-הזווית AD.

35) $ABCD$ טרפז, שבסיסיו a ו- b.
EF ישר מקביל לבסיסים העובר דרך מפגש האלכסונים O (E,F על שוקי הטרפז).
א. הוכח כי $EO=FO$ ב. חשב את EF.
ג. הוכח כי EF קטן מקטע-האמצעים (ולכן תמיד נמצא "מעליו").

36) חוצה-הזווית A במשולש ABC חותך את הצלע BC בנקודה D,
ואת המעגל החוסם את המשולש בנקודה E. מ- E מורידים אנך EF אל BC.
נתון: $AB=3$, $AC=5$. הוכח כי $BC=8FD$.

37) במשולש ABC, AM תיכון ו- AD חוצה זווית.
המעגל החוסם את המשולש AMD חותך את AB ב- L, ואת AC ב- N. הוכח כי $BL=CN$.

38) במשולש ABC מורידים גובה BD ומעבירים קטע EF,
המקביל לגובה וחוצה את שטח המשולש.
ידוע כי $BD=4$, וכן כי $AD:DC=1:8$.
חשב את EF.

39) AB הוא משיק ו- ACD חותך של מעגל. על AD, כקוטר, בונים מעגל.
האנך ל- AD ב- C חותך אותו ב- E.
הוכח כי $AB=AE$.

מקומות גיאומטריים

40) מהנקודה A שבקצה הקטע AB, שאורכו 4, מעבירים קטע AD באורך 3.
מהו המקום ההנדסי של הנקודה C, כך ש- AD חוצה את BC?

41) נתון מעגל O ונקודה A מחוצה לו. הנקודה N נעה על המעגל.
מהו המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים AN?

42) נתונות שתי נקודות A ו- B על ישר נתון.
בונים מעגלים המשיקים לישר הנ"ל, האחד בנקודה A והשני בנקודה B, והמשיקים זה לזה ב- M.
מהו המקום הגיאומטרי של הנקודה M?

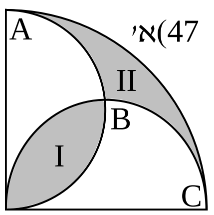
43) ABC משולש.
מעבירים ישר נע מקביל ל- BC, והוא חותך את שתי הצלעות בנקודות B' ו- C'.
מהו המקום הגיאומטרי של נקודת המפגש של BC' ו- CB'?

44) משולש ישר-זווית נתון נע באופן שקצות היתר נשארים על שני ישרים מאונכים.
מהו המקום הגיאומטרי של קדקוד הזווית הישרה? (מהו המסלול שקדקוד זה עובר?)

45) המשולש ABC שווה-צלעות.
מצא את המקום הגיאומטרי של הנקודות P, באופן ש- $PA = PB + PC$.

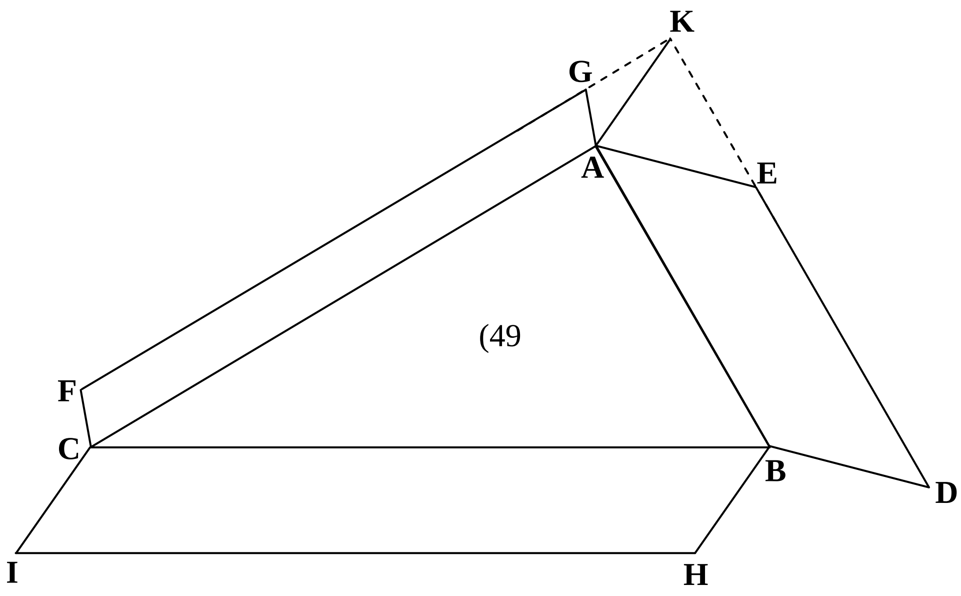
שטחים

46) טרפז ישר-זווית חוסם מעגל ברדיוס R. בסיסו העליון שווה $\frac{3}{2}R$.
מה שטח הטרפז?



47) א. בתוך רבע מעגל מעבירים חצאי מעגלים על כל רדיוס כקוטר, הנחתכים ב- B.
הוכח כי הנקודות A, B ו- C שבשרטוט נמצאות על ישר אחד, וכי $S_I = S_{II}$.
ב. שני מצולעים שווי שטח חוסמים מעגלים שרדיוסיהם 5 ו- 3 בהתאמה.
הפרש היקפי המצולעים הוא 40. חשב את היקף כ"א מהמצולעים.

48) א. הוכח כי בכל משולש מתקיים $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ r - רדיוס המעגל החסום,
h_a, h_b, h_c - הגבהים לצלעות.
ב. נתון כי במשולש $a = 6, b = 8$ וידוע כי $h_c = h_a + h_b$. חשב את c - הצלע השלישית.



49) משולש ABC
שצמודות לו שתי מקביליות
$ABDE$ ו- $ACFG$.
המשכי DE ו- FG
נפגשים ב- K.
מעתיקים את KA
ל- B ול- C
כך ש- $KA=BH=CI$
ו- $KA||BH||CI$.
הוכח כי:
$S_{ABDE} + S_{ACFG} = S_{BCIH}$.

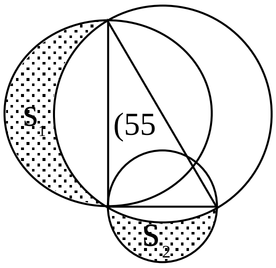
50) א. היקף ריבוע A שווה להיקף מלבן B, ויחס שטחיהם $9:8$
(שטח הריבוע גדול יותר).
מה היחס בין צלעות המלבן?
ב. היחס בין אורכי צלעות מקבילית $ABCD$ הוא $BC:AB = 1:a$.
חוצה הזווית A מחלק את המקבילית לשתי צורות. מה היחס בין שטחי שתי הצורות?

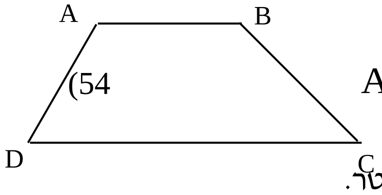
51) שני מעגלים ברדיוסים a ו- b משיקים זה לזה בהשקה חיצונית.
חשב את שטח המרובע הנוצר ע"י שני משיקיהם החיצוניים. (המרובע נקבע ע"י ארבע נקודות ההשקה)

משפט פיתגורס ושימושיו

52) במשולש נתונות הצלעות a ו- b , וידוע כי התיכונים m_a ו- m_b ניצבים זה לזה. חשב את c.

53) א. ריבוע שצלעו a חסום במעגל. באחד מהמקטעים שנוצרו ,חסום ריבוע נוסף. מה צלעו?
ב. ריבוע שצלעו a חוסם מעגל. באחד מהחלקים שנוצרו חסום מעגל נוסף. מה רדיוסו?

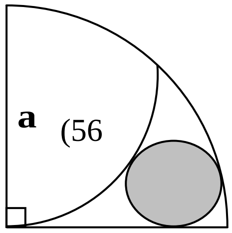




54) ABCD טרפז. הוכח כי קיים :

$$AC^2+BD^2=2CD\cdot AB+AD^2+BC^2$$

55) במשולש ישר זווית בונים מעגל על כל צלע כקוטר.
הוכח כי קיים $s_1+s_2=s_\Delta$.



56) בתוך רבע מעגל שרדיוסו a, חסומה קשת של מעגל שרדיוסו a.
בין רבע המעגל ובין הקשת חסום מעגל קטן.
חשב את רדיוס המעגל הקטן שבשרטוט , באמצעות a בלבד.

57) א. הוכח כי המשיק המשותף לשני מעגלים משיקים הוא הממוצע הגיאומטרי של קוטרי המעגלים.
ב. נתונים שני מעגלים משיקים מבחוץ שרדיוסיהם a ו- b.
בשטח הכלוא, ביניהם לבין משיק משותף חיצוני שלהם, חסום מעגל ,
המשיק לשני המעגלים ולמשיק המשותף. חשב את רדיוסו.

תרגילי הוכחה בכל החומר

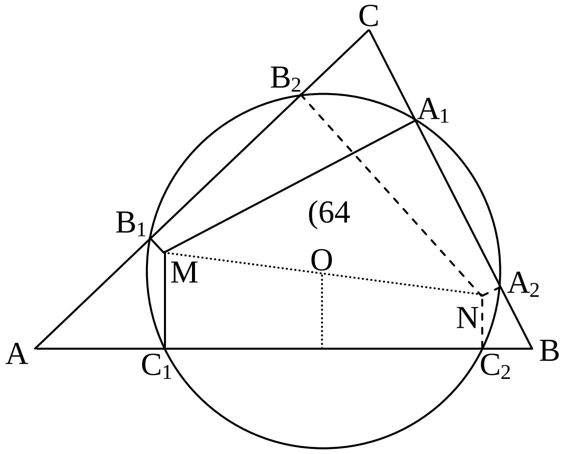
58) א. הוכח כי במשולש ישר-זווית חוצה-הזווית הישרה חוצה גם את הזווית שבין התיכון לבין הגובה, היוצאים מאותו קדקוד.
ב. על היקף מעגל O שרדיוסו 2R בונים מעגל שרדיוסו R (מרכזו על הקף מעגל O).
מ- O מעבירים משיקים OA ו- OB למעגל זה. הוכח כי המשולש OAB הוא שווה-צלעות.

59) המעגלים O ו- M משיקים מבחוץ בנקודה D.
BC משיק חיצוני משותף (B ו- C נקודות המגע).
הישרים OM ו- BC נפגשים בנקודה A.
הוכח כי : א. $\sphericalangle BDC=90^\circ$ ב. $\Delta ACD \sim \Delta ADB$ ג. $DA^2=AC\cdot AB$

60) א. ABC משולש שווה-צלעות. A_1 , B_1 ו- C_1 הם אמצעי הצלעות BC, AC ו- AB , בהתאמה.
הוכח כי הישר A_1C_1 משיק למעגל A_1B_1C.
ב. במעוין ABCD שבו $\sphericalangle A=60^\circ$, חותך הישר MN מצלעות המעוין AB ו- BC
שני קטעים BM ו- BN באופן שסכומם שווה לצלע המעוין. הוכח כי המשולש DMN הוא שווה-צלעות.

61) CN ו- CM הם האנכים היורדים מהקדקוד C על חוצי-הזוויות A ו- B של משולש ABC
(M,N על חוצי הזוויות). הוכח כי הישר MN מקביל לצלע AB.

62) הוכח שאם במשולש מתקיים $AB=AC=\frac{3}{2}BC$,
אז הישר המחבר את אמצעי הצלעות AB ו- AC משיק למעגל החסום במשולש.



63) משולש ABC חסום במעגל. P נקודה כלשהי על המעגל.
מורידים מ- P אנכים אל הצלעות או המשכיהן.
הוכח כי שלוש הנקודות המתקבלות נמצאות על ישר אחד.

64) מעגל K חותך משולש ABC כמתואר בשרטוט.
הניצבים לצלעות המשולש בנקודות A_1, B_1 ו- C_1
נפגשים בנקודה M.
הוכח כי הניצבים בנקודות A_2, B_2 ו- C_2 ,
גם הם נפגשים בנקודה אחת.

65) במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB=AC)$, M היא נקודה על הבסיס BC.
נסמן ב- E,F הטליה על AB,AC, בהתאמה.
א. נסמן ב- G את אמצע BC. הראה כי A, E, M, G ו- F נמצאות על מעגל ומצא את מרכזו D.
ב. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכז המעגל D כאשר הנקודה M נעה מ- B ל- C.
ג. אם H היא עקבת הגובה מ- B, הראה כי $EM+FM=BH$.

66) נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו שווה 1.
בקצות קוטר AB מעבירים משיקים AP ו- BR כך ש- PQ משיק למעגל בנקודה M.
א. הראה כי הזווית $\angle POR=90^\circ$ וכי המכפלה $AP\cdot BR$ שווה ל-1.
ב. חשב את שטח הטרפז $ABRP$ כאשר $\angle AOM=60^\circ$.

67) הוכח כי הגבהים במשולש חד-זווית חוצים את הזוויות של המשולש שקדקודיו הם עקבות הגבהים.

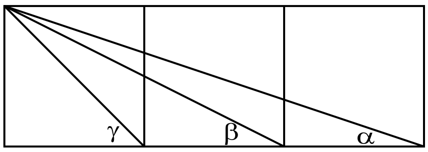
68) נסמן ב- H את נקודת הפגישה של הגבהים במשולש.
הוכח כי הנקודה הסימטרית ל- H ביחס לצלע AB נמצאת על המעגל החוסם את המשולש.

69) הוכח כי במשולש ABC המחוגים OA, OB ו- OC של המעגל החוסם ניצבים לצלעות של המשולש, שקדקודיו הם עקבות הגבהים.

70) נסמן במשולש: p - מחצית ההיקף, r - רדיוס המעגל החסום, R - רדיוס המעגל החוסם,
p' - מחצית ההיקף של המשולש שקדקודיו הם עקבות הגבהים. הוכח כי: $s=pr=p'R$.

71) הוכח כי מחומש חסום במעגל הוא משוכלל אם ורק אם זוויותיו שוות.

72) $A_1,A_2,A_3,...A_{10}$ הוא מעושר משוכלל החסום במעגל ברדיוס R.
הוכח כי $A_1A_4-A_1A_2=R$.



73) שלושה ריבועים סמוכים זה לזה (ראה שרטוט).
הוכח כי $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$.

74) $ABCD$ מקבילית. מ- B מורידים אנך BL אל המשך הצלע DA, ואנך BK אל המשך הצלע DC.
הוכח כי $DA\cdot DL+DC\cdot DK=DB^2$.

75) במשולש ABC מעבירים את הגבהים AD, BE ו- CF. O היא נקודת פגישת הגבהים.
הוכח כי $\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1$.

76) ABC משולש. AD, BE, CF גבהים, ו- H נקודת פגישתם.
נסמן ב- M, K ו- L את אמצעי הקטעים AH, BC ו- AC, בהתאמה.
המקביל ל- AD מ- K, והמקביל ל- BE מ- L, נפגשים ב- O.
הוכח כי $KM=OA$.

77) נתון משולש ABC. נסמן ב- M את נקודת הפגישה של התיכונים וב- H את נקודת פגישת הגבהים.
הוכח כי המרכז I, של המעגל החוסם, נמצא על הישר MH (הנקרא הישר של אוילר),
וכי קיים $\frac{IM}{IH}=\frac{1}{3}$.

78) הוכח כי במשולש ABC, תשע הנקודות הבאות נמצאות על מעגל אחד (מעגל 9 הנקודות):
א. אמצעי הצלעות. ב. עקבות הגבהים. ג. אמצעי הקטעים HA, HB, HC (H נקודת פגישת הגבהים).

79) K,L,M,N הם מרכזי הריבועים הבנויים על צלעות של מעוין (כלפי חוץ).
הוכח כי $KLMN$ ריבוע.

80) על כל צלע של המקבילית $ABCD$ בונים כלפי חוץ ריבוע. הוכח כי מרכזי הריבועים הללו, יוצרים ריבוע.

81) ABC משולש שווה-שוקיים, שבסיסו BC. M נקודה כלשהי על הבסיס.
המעגל ABM חותך את AC ב- K, והמעגל ACM חותך את AB ב- L.
הוכח כי הסכום $CK+BL$ הוא גודל קבוע, שאינו תלוי במיקום הנקודה M.

מכינת
הטכניון

82) B,A הם קצות קוטר במעגל. AC ו- BD הם שני מיתרים הנחתכים ב- M.
הוכח כי $AC\cdot AM+BD\cdot BM$ הוא גודל קבוע (כלומר, אינו תלוי בבחירת AC ו- BD).

83) AD , BM ו- CF הם שלושת הגבהים במשולש ABC , הנפגשים ב- H.
הוכח כי $BM\cdot BH+FC\cdot HC=BC^2$.

84) ABC משולש שווה-שוקיים עם בסיס AC.
בונים מעגל שמרכזו במרכז הבסיס O והוא משיק לשוקיים.
מנקודה P כלשהי על המעגל מעבירים משיק למעגל, החותך את BC ב- N ואת BA ב- M.
הוכח כי $AM\cdot NC$ הוא גודל קבוע, אשר אינו תלוי במיקום הנקודה P, ומצא גודל קבוע זה.

85) $ABCD$ טרפז שווה-שוקיים. הבסיס הקטן DC שווה לשוקיים.
הקוטר העובר דרך D במעגל החוסם את הטרפז, חותך את בסיסו הגדול ב- E. הוכח:
א. ΔADE שווה-שוקיים.
ב. אם קובעים על הבסיס הגדול נקודה F באופן ש- $EF=AE$,
אז CF חותך את המעגל החוסם את הטרפז בקצה הקוטר היוצא מ- A.

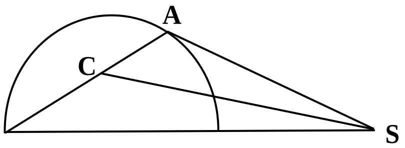
86) $ABCD$ ריבוע. דרך A העבירו ישר כלשהו החותך את BC ב- E, את CD ב- F ואת BD ב- G.
הוכח כי CG משיק למעגל CEF.

87) נתונות נקודות C,B,A ו- D. מעבירים את המעגל O החוסם את ΔBCD,
את המעגל O_1 החוסם את ΔBCA, ואת המעגל O_2 החוסם את ΔBAD.
ידוע כי CD משיק למעגלים O_2 ו- O_1.
אם נסמן ב- D_2,D_1,D את הקטרים המתאימים, הוכח כי $D^2=D_1D_2$.

88) נגדיר את הסדרה הבאה: $a_1=1\ ,\ a_2=1\ ,\ \cdots\ ,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $2<n$.
הוכח באופן גיאומטרי כי: $a_1^2+a_2^2+...+a_4^2=a_n\cdot a_{n+1}$. (נסה להוכיח גם באמצעות אינדוקציה)

89) $ABCD$ טרפז, $\angle A=\angle B=90^\circ$.
דרך I, מפגש האלכסונים, העבירו מקביל לבסיסים, החותך את AB ב- E.
הוכח כי EI חוצה את הזווית CED.

תרגילי חישוב בכל החומר



90) בשרטוט: AS משיק ו- SC חוצה זווית. הוכח כי $\angle SCA=45^\circ$.

91) א. במשולש נתון $a=4$, $b=5$, $c=6$.
מצא את רדיוס המעגל שמרכזו על הצלע c, והוא משיק לצלעות a ו- b.
ב. הוכח כי במשולש ישר זווית קיים $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ h - גובה ליתר, a,b - ניצבים.

92) א. הוכח כי קטע-האמצעים בטרפז שווה-שוקיים, החוסם מעגל, שווה לשוק.
ב. בטרפז שווה-שוקיים החוסם מעגל, זווית הבסיס היא 60° ואורך השוק 8.
חשב את בסיסי הטרפז.

93) במשולש שווה-שוקיים נתון $CA=CB=40$, $CD=32$, כאשר D מרכז הבסיס AB.
חשב את רדיוס המעגל החוסם, פעם באמצעות שימוש בגיאומטרית המישור ופעם תוך שימוש במשפט הסינוסים.

94) אורך מחוג המעגל, העובר דרך אמצעי צלעות המשולש ABC, הוא 7.
חשב את מחוג המעגל החוסם את המשולש ABC.

95) במשולש ישר-זווית הניצבים הם $AC=30$ $AB=40$, .
על התיכון AD, כעל קוטר, בנו מעגל, החותך את היתר בנקודה E. חשב את DE.

96) טרפז חוסם מעגל, שרדיוסו R. הוכח כי מכפלת קטעי השוק, שווה לריבוע הרדיוס.

97) במשולש שווה-שוקיים $CA=CB=40$ $CD=32$, , כאשר D מרכז הבסיס AB.
חשב את רדיוס המעגל החסום, פעם באמצעות משפט חוצה-זווית ופעם באמצעות שטחים.

98) חצי מעגל חסום במשולש ישר-זווית, באופן שמרכזו O נמצא על היתר AC.
נתון $OA=15$, $OC=20$. א. מה שטח חצי המעגל? ב. מה שטח המשולש?

מכינת
הטכניון

99) במשולש ישר-זווית ABC נתונים הניצבים $BC=a$ ו- $AC=b$, כאשר $a<b$.
מנקודה על הניצב AC מורידים אנך על היתר AB .
האנך מחלק את המשולש לשני חלקים שווי שטח. בטא באמצעות a ו- b את:
א. אורך האנך. ב. שטח העיגול החוסם את המרובע.

100) שני מעגלים נחתכים באופן שהחלק המשותף שווה בשטחו לסכום שני החלקים שאינם משותפים.
אם a ו- b הרדיוסים $(a\le b)$, הוכח כי $\frac{b}{a}\le\sqrt{2}$.

101) נתונים שלושה מעגלים שווים ברדיוס a , המשיקים זה לזה.
א. חשב את השטח הכלוא ביניהם. ב. את רדיוס המעגל החסום בתחום זה ומשיק לשלושת המעגלים.

102) נתון משולש ישר-זווית שניצביו 3 ו- 4 .
דרך אמצע הניצב הקטן ואמצע היתר מעבירים מעגל המשיק ליתר. מה שטח המעגל?

103) נתון משולש ישר זווית שניצביו 3 ו- 4 .
בונים על היתר מעגל המשיק לניצב הקצר AC , ועובר דרך הקדקוד B $(\angle C=90^\circ)$. מה רדיוסו?

104) א. ABC משולש ישר-זווית ב- A . מעגל , הבנוי על AC כקוטר , חותך את BC ב- D .
$AB=30$ $AD=24$, . חשב את AC .
ב. ABC משולש שווה-שוקיים בו $AC=4$ ו- $BA=BC=\sqrt{40}$.
מעגל הבנוי על BA כקוטר, חותך את BC ב- E ואת AC ב- D .
חשב את שטח המשולש DEC .

105) גובה המשולש מחלק את הבסיס לשני קטעים , 14 ו- 36 .
מעבירים ישר מקביל לגובה , החוצה את שטח המשולש. מהם הקטעים המתקבלים על הבסיס?

106) הבע צלע של מעושר משוכלל באמצעות רדיוס המעגל החוסם אותו , ומצא בעזרת הנ״ל את הערך של $\sin 18^\circ$.

107) נתונים שני משולשים דומים ABC ו- $A'B'C'$
כאשר $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\alpha>1$. כמו כן , נתון ש- $AB=B'C'$ ו- $BC=A'C'$.
א. הוכח כי בכל משולש , אורכי הצלעות הם סדרה גיאומטרית.
ב. הוכח כי $\alpha-\frac{1}{\alpha}<1$.

108) הוכח כי במשולש ישר-זווית: א. $c^3>a^3+b^3$ c - יתר.
ב. $r=\sqrt{R^2+S}-R$ r - רדיוס המעגל החסום במשולש.
R - רדיוס המעגל החוסם את המשולש. S - שטח המשולש.

109) ABC משולש שווה-צלעות. סביב מרכזו O , חגו מעגל ברדיוס $\frac{a}{3}$ a -צלע המשולש.
המעגל חותך את המשולש ליד B בנקודות F ו- E .
חשב את שטח המרובע $OFBE$ ואת שטח הצורה FBE .

110) ABC משולש. הישרים MD, KE ו- LN , המקבילים לצלעות , נפגשים בנקודה O ,
באופן ש- M ו- N על BC , K ו- L על AC ו- D ו- E על AB .
נסמן את שטח המשולש LKO ב - S_1 , את שטח ΔOMN ב- S_2 ואת שטח ΔDEO ב- S_3 .
הוכח כי שטח המשולש S מקיים $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$.

111) במשולש , הצלעות הן x , $x+1$, $x+2$,
והזווית הגדולה ביותר גדולה פי שניים מהזווית הקטנה ביותר. חשב את צלעות המשולש.

112) חשב את אורך חוצה הזווית B באמצעות הצלעות a, b ו- c של משולש ABC .

113) נקודת פגישת הגבהים במשולש ABC היא H . L נקודה על CH באופן ש- $AL\perp BL$.
נסמן ב- S את שטח המשולש ALB , ב- S_1 את שטח המשולש ABC וב- S_2 את שטח המשולש ABH .
הוכח כי S הוא ממוצע גיאומטרי של S_1 ו- S_2 .

114) שני מעגלים שרדיוסיהם R ו- r משיקים חיצונית בנקודה C.
חשב את מרחק הנקודה C מהמשיק המשותף החיצוני AB.

115) מנקודה C שמחוץ למעגל מעבירים שני משיקים CA ו- CB.
מ- P, נקודה כלשהי על הקשת AB,
מורידים אנכים PD PE, ו- PF אל AB, BC ו- CA בהתאמה.
הוכח כי $PD^2 = PF \cdot PE$.

116) A, B ו- C הן שלוש נקודות על ישר אחד. נתון $AB = 2R$, $BC = 2r$. ($r < R$).
בונים שלושה חצאי מעגלים על AB, BC ו- AC כקטרים.
חשב את רדיוס המעגל החסום בשטח הכלוא בין שלושת חצאי המעגלים הנ״ל ומשיק לשלושתם.

תשובות

31) $\frac{bc}{2R}$ 32) $EF = \frac{2ab}{a-b}$ 34) $AD = 3\frac{3}{7}$ 38) $EF = 3$ 46) $S = 4.5R^2$ 47)ב. $P_1 = 30, P_2 = 50$

48)ב. $c = 3\frac{3}{7}$ 50)ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2a-1}$ 51) $S = \frac{8(Rr)^{\frac{3}{2}}}{R+r}$ 52) $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$ 53)א. $\frac{a}{5}$ ב. $\frac{a}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)$

56) $r = \frac{a}{6}$ 57) $r = \frac{ab}{a+2\sqrt{ab}+b}$ 66)ב. $S = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 91)א. $r = \frac{5\sqrt{7}}{6}$ 92) $4,12$ 93) $R = 25$

94) $R = 14$ 95) $DE = 7$ 97) $r = 12$ 98)א. $S_{\frac{1}{2}} = 72\pi$ ב. $S_{\Delta} = 294$

99)א. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ב. $S = \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2}\left(a^2+b^2\right) - 2\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\right]$ 101)א. $S = a^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ ב. $r = a\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

102) $S = \frac{25\pi}{9}$ 103) $R = 2\frac{2}{9}$ 104)א. $AC = 40$ ב. $S_{\square DEC} = 1.2$ 105) $30,6,14$

106) $\sin 18^o = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $x = R\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 109) $S_{OFBE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}$, $S_{FBE} = \frac{a^2}{54}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ 111) $4,5,6$

112) $\ell_B = \frac{\sqrt{ac\left[\left(a+c\right)^2-b^2\right]}}{a+c}$ 114) $\frac{2Rr}{R+r}$ 116) $\frac{Rr\left(R+r\right)}{R^2+Rr+r^2}$