פתרון מלא

חלק א'

1. נתון: ABCD מקבילית
$ADFE$ ו- $DCHG$ ריבועים.
צ"ל: א. $BE = BH$
ב. $BE \perp BH$

הוכחה:

1	ABCD מקבילית	נתון
2	$AB = DC \quad , \quad AD = BC$	הצלעות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו באורכן
3	$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB = \alpha$ $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 180 - \alpha$	הזוויות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו בגודלן הזוויות הסמוכות במקבילית סכומן $180°$
4	$DCHG$, $ADFE$ ריבועים	נתון
5	$AE = AD = DF = FE$ $DC = CH = HG = GD$	הצלעות בריבוע שוות זו לזו באורכן
6	$AE = BC$ $CH = AB$	כלל המעבר לפי סעיף 2,5
7	$\sphericalangle AED = 90°$ $\sphericalangle DCH = 90°$	הזוויות בריבוע ישרות
8	$\sphericalangle EAB = \sphericalangle HCB$	מעבר בעזרת סעיפים 7,3
9	$\Delta EAB \cong \Delta HCB$	צ.ז.צ
10	$BE = BH$	מול זוויות שוות במשולשים חופפים נמצאות צלעות שוות מ.ש.ל סעיף א'
11	$\sphericalangle ABE = \sphericalangle BHC = \beta$	מול צלעות שוות במשולשים חופפים נמצאות זוויות שוות
12	$\sphericalangle HBC = 180 - (90 + \alpha) - \beta = 90 - \alpha - \beta$	סכום הזוויות במשולש HBC הוא $180°$
13	$\sphericalangle EBH = 180 - \alpha - \beta - (90 - \alpha - \beta) = 90$ $\Rightarrow BE \perp BH$	מ.ש.ל סעיף ב'

2. נתון: DE קטע אמצעים במשולש ABC

$BG = GD \quad , \quad DF = FC$

צ״ל: א. $DEGF$ מקבילית

ב. זוויות המקבילית $DEGF$

הוכחה:

1	DE קטע אמצעים במשולש ABC	נתון
2	$AE = EB$ $AD = DC$ $DE \parallel CB$ $DE = \frac{1}{2}CB$	קטע האמצעים במשולש חוצה את שוקי המשולש קטע האמצעים במשולש מקביל לבסיס המשולש קטע האמצעים שווה למחצית מאורך הבסיס
3	$BG = GD$ $DF = FC$	נתון נתון
4	GF קטע אמצעים במשולש BDC	קטע שיוצא מאמצע שוק אחת של משולש ומגיע לאמצע השוק השנייה הוא קטע אמצעים
5	$GF = \frac{1}{2}CB$ $GF \parallel CB$	קטע האמצעים שווה למחצית מאורך הבסיס קטע האמצעים במשולש מקביל לבסיס המשולש
6	$GF = DE$ $GF \parallel DE$	מעבר לפי סעיפים 2,5
7	$DEGF$ מקבילית	מרובע שיש לו זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית מ.ש.ל סעיף א
8	$\sphericalangle A + \sphericalangle ABC = 115°$	נתון
9	$\sphericalangle C = 180° - 115° = 65°$	סכום זוויות במשולש ABC הוא $180°$
10	$\sphericalangle DFG = 65°$	זוויות מתאימות בישרים מקבילים שוות זו לזו לפי סעיף 5,9
11	$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DEG = 65°$ $\sphericalangle FDE = \sphericalangle EGF = 115°$	לפי סעיף 7. הזוויות הנגדיות במקבילית שוות זו לזו בגודלן הזוויות הסמוכות במקבילית סכומן $180°$. מ.ש.ל סעיף ב

.3

$$1+\cos\alpha \neq 0 \quad , \quad 1-\cos\alpha \neq 0 \quad , \quad \sin\alpha \neq 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{2}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{2}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin^2\alpha(1-\cos\alpha)+\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)-2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin^2\alpha\cancel{-\sin^2\alpha\cos\alpha}+\sin^2\alpha+\cancel{\sin^2\alpha\cos\alpha}-2\left(1-\cos^2\alpha\right)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=$$

$$\frac{2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{0}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}=0$$

חלק ב'

.4 נפרק את המכנים :

$$x^2-2x-15=x^2-5x+3x-15=x(x-5)+3(x-5)=(x-5)(x+3)$$

$$x^2-8x+15=x^2-3x+5x-15=x(x-3)+5(x-3)=(x-3)(x-5)$$

$$\left(\frac{1}{9-x^2}-\frac{2}{x^2-8x+15}\right)\div\frac{3x+1}{x^2-2x-15}=$$

$$\left(\frac{1}{(3-x)(3+x)}-\frac{2}{(x-3)(x-5)}\right)\div\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=$$

$$\left(\frac{-1}{(x-3)(3+x)}-\frac{2}{(x-3)(x-5)}\right)\div\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=$$

$$\frac{-(x-5)-2(3+x)}{(x-3)(3+x)(x-5)}\div\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=$$

$$\frac{-x+5-6-2x}{(x-3)(3+x)(x-5)}\div\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=$$

$$\frac{-3x-1}{(x-3)(3+x)(x-5)}\div\frac{3x+1}{(x-5)(x+3)}= \qquad \boxed{x\neq -3,3,5,-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{-\cancel{(3x+1)}}{(x-3)\cancel{(3+x)}\cancel{(x-5)}}\cdot\frac{\cancel{(x-5)}\cancel{(x+3)}}{\cancel{(3x+1)}}=\boxed{-\frac{1}{(x-3)}}$$

5. נפרק את המכנים:

$$x^2+8x+7=x^2+x+7x+7=x(x+1)+7(x+1)=(x+7)(x+1)$$

$$\frac{x+4}{2x+14}+\frac{x+2}{2x+2}=\frac{9}{x^2+8x+7}$$

$$\frac{x+4}{2(x+7)}+\frac{x+2}{2(x+1)}=\frac{9}{(x+7)(x+1)} \qquad /\cdot 2(x+7)(x+1) \qquad \boxed{x\neq -7,-1}$$

$$(x+1)(x+4)+(x+7)(x+2)=18$$

$$x^2+5x+4+x^2+9x+14-18=0$$

$$2x^2+14x=0$$

$$2x(x+7)=0 \Rightarrow \begin{matrix}\boxed{x=0}\\ \boxed{\cancel{x=-7}}\end{matrix}$$

6.

$$\begin{cases}\frac{2}{2x-y}+\frac{1}{y-x}=\frac{1}{15}\\ \frac{1}{2x-y}-\frac{1}{y-x}=\frac{8}{15}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}t=\frac{1}{2x-y}\\ k=\frac{1}{y-x}\end{matrix}} \Rightarrow +\begin{cases}2t+k=\frac{1}{15}\\ t-k=\frac{8}{15}\end{cases} \Rightarrow$$

$$3t=\frac{9}{15} \Rightarrow t=\frac{3}{15}\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{1}{5}-k=\frac{8}{15} \Rightarrow$$

$$3-15k=8 \Rightarrow -15k=5 \Rightarrow \boxed{k=-\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{5}=\frac{1}{2x-y}\\ -\frac{1}{3}=\frac{1}{y-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5=2x-y\\ -3=y-x\end{cases} \Rightarrow +\begin{cases}2x-y=5\\ -x+y=-3\end{cases} \Rightarrow \boxed{\boxed{x=2} \Rightarrow \boxed{y=-1}}$$

.7

$$3^{\frac{2}{x-3}}=3^{12}\cdot\left(3^{-2}\right)^{x+1} \quad\Rightarrow\quad 3^{\frac{2}{x-3}}=3^{12-2(x+1)}$$

$$\frac{2}{x-3}=12-2x-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{x-3}=10-2x$$

$$2=(x-3)(10-2x) \quad\Rightarrow\quad 2=10x-2x^2-30+6x$$

$$2x^2-16x+32=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-8x+16=0$$

$$(x-4)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=4}$$

הפתרון נבדק ע״י הצבה במקור ויצא תקין

.8

$$x+\log_2\left(\frac{9}{2}-2^x\right)=1 \quad\Rightarrow\quad \log_2\left(\frac{9}{2}-2^x\right)=1-x$$

$$2^{1-x}=\frac{9}{2}-2^x \quad\Rightarrow\quad \frac{2^1}{2^x}=\frac{9}{2}-2^x \qquad \boxed{2^x=t}$$

$$\frac{2}{t}=\frac{9}{2}-t \quad\Rightarrow\quad 4=9t-2t^2$$

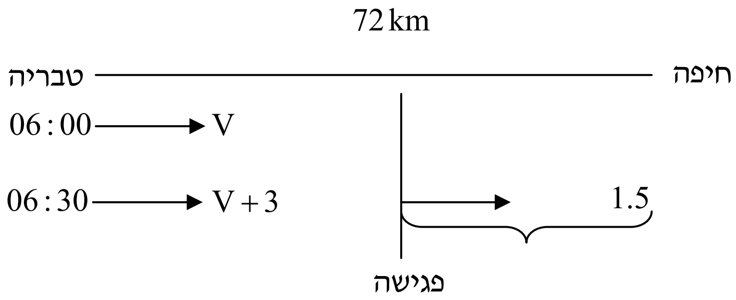
$$2t^2-9t+4=0 \quad\Rightarrow\quad 2t^2-8t-t+4=0$$

$$2t(t-4)-1(t-4)=0$$

$$(t-4)(2t-1)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} t=4 \quad\Rightarrow\quad 2^x=4 \quad\Rightarrow\quad 2^x=2^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boxed{x=2}} \\ t=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2^x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2^x=2^{-1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boxed{x=-1}} \end{cases}$$

הפתרון נבדק ע״י הצבה במקור ויצא תקין

.9



		מהירות (קמ״ש)	זמן (שעה)	דרך (ק״מ)
רוכב 1		V	$\frac{67.5-1.5V}{V}$	$72-(1.5V+4.5)=$ $67.5-1.5V$
רוכב 2	עד הפגישה	$V+3$	$\frac{67.5-1.5V}{V+3}$	$72-(1.5V+4.5)=$ $67.5-1.5V$
	אחרי הפגישה	$V+3$	1.5	$1.5(V+3)=$ $1.5V+4.5$

הרוכב הראשון יצא חצי שעה לפני הרוכב השני לכן:

$$\frac{67.5-1.5V}{V}-\frac{1}{2}=\frac{67.5-1.5V}{V+3}$$

אחרי מכנה משותף נקבל:

$$2(V+3)(67.5-1.5V)-V(V+3)=2V(67.5-1.5V)$$

$$\cancel{135V}\ \cancel{-3V^2}+405-9V-V^2-3V=\cancel{135V}\ \cancel{-3V^2}$$

$$V^2+12V-405=0$$

בעזרת נוסחת השורשים:

$$V_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+4\cdot405}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+1620}}{2}=\frac{-12\pm\sqrt{1764}}{2}=\frac{-12\pm42}{2}$$

$$V_1=15\quad,\quad\cancel{V_1=-27}$$

בעזרת טרינום:

$$(V+27)(V-15)=0\quad\Rightarrow\quad V_1=15\quad,\quad\cancel{V_1=-27}$$

מהירות רוכב אחד 15 קמ״ש.

מהירות רוכב שני 18 קמ״ש.

.10

א.

$$K(2,??) \Rightarrow y=-2^2+7\cdot 2=-4+14=10 \Rightarrow \boxed{K(2,10)}$$

$$E(??,6) \Rightarrow 6=-x^2+7x \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-6)(x-1)=0$$

$$x=6\ ,\ x=1 \quad \Rightarrow \boxed{E(6,6)}$$

$$6=-x^2+7x \Rightarrow x^2-7x+6=0 \ (x-6)(x-1)=0 \ \Rightarrow \ \boxed{F(1,6)}$$

ב. $$S=\frac{10\cdot 4}{2}=\frac{40}{2}=20$$

ג. $$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2} \Rightarrow y=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+7\cdot\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{-49}{4}+\frac{49}{2}=\frac{49}{4} \Rightarrow \left(\frac{7}{2},\frac{49}{4}\right)$$

עולה: $x<3.5$

יורד: $x>3.5$

ד. $$-x^2+7x=0 \Rightarrow x(7-x)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=7$$

חיוביות: $0<x<7$

שליליות: $x<0$ או $x>7$