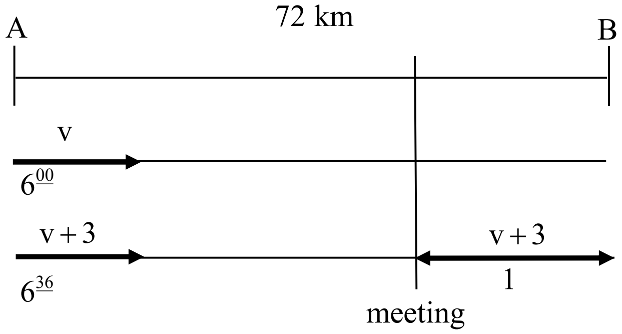
02.09.18

<u>מבחן כניסה במתמטיקה – מכינת הטכניון – פתרון מלא</u>

1. רוכב אופניים אחד יצא בשעה $6:00$ מטבריה לחיפה, מרחק של 72 ק״מ.
רוכב אופניים שני, שמהירותו **גדולה** ב- 3 קמ״ש מזו של הראשון, יצא בשעה $6:36$ גם הוא מטבריה לחיפה.
הרוכב השני השיג את הרוכב הראשון **לפני** הגיעו לחיפה ושעה לאחר מכן הגיע לחיפה.
מצאו את המהירויות של רוכבי האופניים.

<u>**פתרון מלא**</u>:

	מהירות $\left[\frac{km}{hr}\right]$	זמן $[hr]$	דרך $[km]$
רוכב א׳ עד הפגישה	v	$\frac{69-v}{v}$	$72-(v+3)=69-v$
רוכב ב׳ עד הפגישה	$v+3$	$\frac{69-v}{v+3}$	$72-(v+3)=69-v$
רוכב ב׳ אחרי הפגישה	$v+3$	1	$(v+3)$



הרוכב השני יצא 36 דקות שהם $\frac{3}{5}$ שעה אחרי הרוכב הראשון. לכן נוכל לרשום:

$$\frac{69-v}{v}=\frac{69-v}{v+3}+\frac{36}{60}$$
$$\frac{69-v}{v}-\frac{69-v}{v+3}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{(69-v)(v+3-v)}{v(v+3)}=\frac{3}{5}$$
$$15(69-v)=3v^2+9v$$
$$5(69-v)=v^2+3v$$
$$v^2+8v-345=0$$
$$(v+23)(v-15)=0$$
$$v=15$$

מהירות רוכב א׳ 15 קמ״ש

מהירות רוכב ב׳ 18 קמ״ש

2. פשטו את הביטוי ככל שניתן : $\frac{(m+1)^2(m+2)^3}{4}+(m+2)^4-\frac{(m+3)^2(m+2)^3}{4}$

<u>פתרון מלא</u> :

$$\frac{(m+1)^2(m+2)^3}{4}+(m+2)^4-\frac{(m+3)^2(m+2)^3}{4}=$$

$$(m+2)^3\left[\frac{(m+1)^2}{4}+(m+2)-\frac{(m+3)^2}{4}\right]=$$

$$(m+2)^3\left[\frac{m^2+2m+1+4m+8-m^2-6m-9}{4}\right]=$$

$$(m+2)^3\left[\frac{0}{4}\right]=\boxed{0}$$

3. פתרו את מערכת המשוואות :

$$\begin{cases}\frac{10}{x+6}+\frac{6}{y+2}=\frac{3}{2}\\ \frac{5}{x+6}-\frac{3}{y+2}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

<u>פתרון מלא</u> :

$$\begin{cases}\frac{10}{x+6}+\frac{6}{y+2}=\frac{3}{2} & /:2\\ \frac{5}{x+6}-\frac{3}{y+2}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5}{x+6}+\frac{3}{y+2}=\frac{3}{4}\\ \frac{5}{x+6}-\frac{3}{y+2}=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\boxed{+}\ \Rightarrow\ \frac{10}{x+6}=1\ \Rightarrow\ 10=x+6\ \Rightarrow\ \boxed{x=4}$$

$$\boxed{-}\ \Rightarrow\ \frac{6}{y+2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 12=y+2\ \Rightarrow\ \boxed{y=10}$$

4. פתרו את המשוואה :
$$9\left(\frac{4}{9}\right)^{x+\frac{1}{2}}+4=10\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$$

<u>פתרון מלא</u>:

$$9\left(\frac{4}{9}\right)^{x+\frac{1}{2}}+4=10\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$$

$$9\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+4=10\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$9\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\cdot\frac{2}{3}+4=10\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$\text{denote}:\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$$

$$9t^2\cdot\frac{2}{3}+4=10t$$

$$6t^2-10t+4=0$$

$$3t^2-5t+2=0$$

$$3t^2-3t-2t+2=0$$

$$3t(t-1)-2(t-1)=0$$

$$(3t-2)(t-1)=0$$

$$t=\frac{2}{3} \qquad\qquad t=1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{1} \qquad\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$$

$$\boxed{x=1} \qquad\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$\boxed{x=0}$$

5. פתרו את המשוואה : $x^{1+\log_9(3x)}=9$

פתרון מלא:

$$x^{1+\log_9(3x)}=9$$

denote: $\log_9(3x)=t$

$$9^t=3x$$

$$\frac{9^t}{3}=x$$

$$x=\frac{3^{2t}}{3}$$

$$x=3^{2t-1}$$

$$\left(3^{2t-1}\right)^{(1+t)}=3^2$$

$$(2t-1)(1+t)=2$$

$$2t^2+t-3=0$$

$$2t^2-2t+3t-3=0$$

$$2t(t-1)+3(t-1)=0$$

$$(2t+3)(t-1)=0$$

set:

$t=-\frac{3}{2}$	$t=1$
$x=3^{-3-1}$	$x=3^{2-1}$
$x=3^{-4}$	$x=3^1$
$\boxed{x=\frac{1}{81}}$	$\boxed{x=3}$

6. פתרו את המשוואה : $2x^2 - mx - 2x = m^2 + m$

<u>פתרון מלא</u> :

$$2x^2 - mx - 2x = m^2 + m$$
$$2x^2 - (m+2)x - m^2 - m = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{m+2 \pm \sqrt{(m+2)^2 + 8(m^2+m)}}{4} =$$
$$= \frac{m+2 \pm \sqrt{m^2+4m+4+8m^2+8m}}{4} =$$
$$= \frac{m+2 \pm \sqrt{9m^2+12m+4}}{4} =$$
$$= \frac{(m+2) \pm \sqrt{(3m+2)^2}}{4} =$$
$$= \frac{m+2 \pm (3m+2)}{4} =$$
$$= \begin{cases} \rightarrow \dfrac{m+2+3m+2}{4} = \dfrac{4m+4}{4} = \boxed{m+1} \\ \rightarrow \dfrac{m+2-3m-2}{4} = \dfrac{-2m}{4} = \boxed{-\dfrac{m}{2}} \end{cases}$$

7. נתון משולש ABC.

BE גובה לצלע AC.

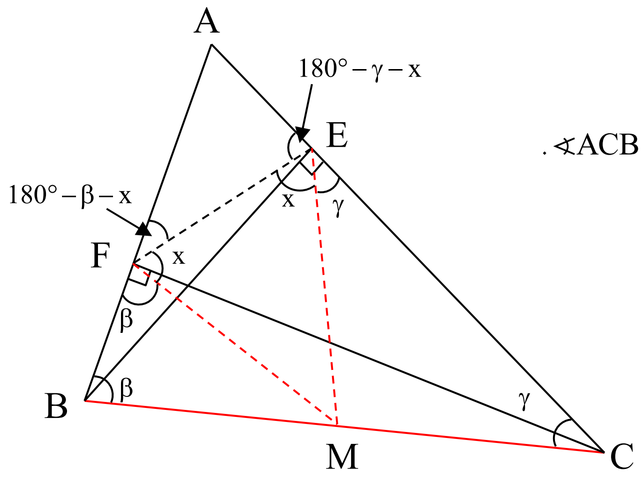
CF גובה לצלע AB.

נסמן: M אמצע BC, $\sphericalangle ABC=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$.

הוכיחו:

א. משולש EFM שווה שוקיים.

ב. $\sphericalangle AEF=\beta$.



<u>פתרון מלא</u>:

א. 1. ΔBEC , ΔAFC ישר זווית (נתון).

2. $BM=MC$ (נתון).

3. EM , FM (חותך ליתר במשולש ישר זווית) לכן :

4. $FM=EM=BM=MC$ (התיכון ליתר שווה למחצית מהיתר).

5. ΔEFM ש״ש (מסעיף 4) <u>מ.ש.ל.</u>

ב. 6. $FM=BM\Rightarrow\measuredangle FBM=\measuredangle BFM=\beta$ (משולש ש״ש).

7. $EM=MC\Rightarrow\measuredangle ECM=\measuredangle CEM=\gamma$ (משולש ש״ש).

8. $\measuredangle EFM=\measuredangle FEM=x$ (ΔFEM ש״ש).

9. $2x+2\beta+2\gamma=360°$ (סכום זוויות במרובע).

10. $\beta=180°-x-\gamma$ (חישוב).

11. $\measuredangle AEF=180°-\gamma-x$ (צמודות).

12. $\measuredangle AEF=\beta$ <u>מ.ש.ל.</u>

8. הוכיחו את הזהות: $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$

<u>פתרון מלא</u>:

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\tan\alpha=\tan\alpha$$

<u>מ.ש.ל.</u>

9. חשבו: $\left(\frac{\cos 315^\circ}{1-\sin 225^\circ}+\frac{1-\cos 135^\circ}{\sin 135^\circ}\right).\sqrt{2}=?$

<u>פתרון מלא</u>:

$$\cos 315^\circ=\cos\left(360^\circ-45^\circ\right)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 225^\circ=\sin\left(180^\circ+45^\circ\right)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 135^\circ=\cos\left(180^\circ-45^\circ\right)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin 135^\circ=\sin\left(180^\circ-45^\circ\right)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{\cos 315^\circ}{1-\sin 225^\circ}+\frac{1-\cos 135^\circ}{\sin 135^\circ}\right).\sqrt{2}=\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\cdot\sqrt{2}=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}=\frac{2+\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}\cdot\sqrt{2}=$$
$$=\frac{2+4+4\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}}=\frac{8+4\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)}=\boxed{4}$$

10. מחירו של מוצר א׳ היה **גדול** ב- 10% ממחירו של מוצר ב׳.

הוזילו את מחירו של מוצר א׳ ב- 25%.

הוזילו את מחירו של מוצר ב׳ ב- 21 ש״ח.

לאחר ההורדות מחיר מוצר א׳ היה **שווה** למחיר מוצר ב׳.

מצאו את המחיר של כל אחד משני המוצרים לפני ההוזלה.

<u>**פתרון מלא**</u>:

* מחיר מוצר א׳ - $1.1x$ ש״ח
* מחיר מוצר ב׳ - x ש״ח

* מוצר א׳ יורד ב- 25% ולכן מחירו : $0.75 \cdot 1.1x$ ש״ח
* מוצר ב׳ יורד ב- 21 ש״ח ולכן מחירו : $(x-21)$ ש״ח

נתון שאחרי ההורדות המחירים שווים. לכן נרשום :

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{10}x = x-21$$
$$\frac{33x}{40} = x-21$$
$$33x = 40x-480$$
$$7x = 840$$
$$\boxed{x = 120}$$

לכן סה״כ :

$\boxed{\text{מחיר מוצר א׳ - 132 ש״ח}}$

$\boxed{\text{מחיר מוצר ב׳ - 120 ש״ח}}$