מבחן דוגמא

24 בפברואר 2021

הוראות:

- רשום פתרון מסודר הכולל את כל השלבים והחישובים.
- מצא את כל הפתרונות האפשריים.
- פשט ככל הניתן את הביטויים הסופיים.

שאלה ראשונה

פשט את הביטוי $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$

פיתרון

לשם נוחות נציב $t=a^{\frac{1}{2}}$ ולכן $a=t^2$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{t+2}{t^2+2t+1}-\frac{t-2}{t^2-1}\right)\cdot\frac{t+1}{t}=\left(\frac{t+2}{(t+1)^2}-\frac{t-2}{(t+1)(t-1)}\right)\cdot\frac{t+1}{t}=\left(\frac{(t+2)(t-1)}{(t+1)^2(t-1)}-\frac{(t-2)(t+1)}{(t+1)^2(t-1)}\right)\cdot\frac{t+1}{t}$$
$$=\frac{t^2+t-2-t^2+t+2}{(t+1)^2(t-1)}\cdot\frac{t+1}{t}=\frac{2t}{(t+1)^2(t-1)}\cdot\frac{t+1}{t}=\frac{2}{(t+1)(t-1)}=\frac{2}{t^2-1}=\frac{2}{a-1}$$

שאלה שניה

מצא את ערכי x המקיימים את המשוואה

$$\frac{9}{x^2-3x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3-x}=\frac{x-3}{2x}$$

פיתרון

תחום ההגדרה של פתרונות המשוואה אינו כולל את המאפסים של המכנים, כלומר $x\neq 0,3$. כמוכן נשים לב כי $3-x=-(x-3)$. כלומר נוכל לרשום את המישוואה כך

$$\frac{9}{x(x-3)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-3}{2x}$$

כעת נכפול את המשוואה בכופל המשותף הקטן ביותר של המכנים $2x(x-3)$

$18-2(x-3)-2x=(x-3)^2$

נפתח סוגריים ונכנס איברים

$24-4x=x^2-6x+9$

נחבר $4x-24$ לשני האגפים

$0=x^2-2x-15$

נפרק את הטרינום לגורמים

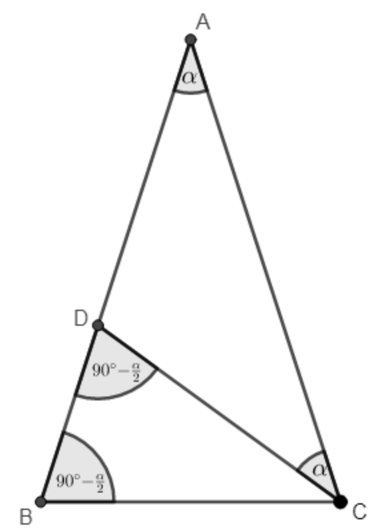
$0=(x-5)(x+3)$

והפתרונות הם $\boxed{x=-3,5}$

שאלה שלישית

במשולש שווה שוקיים ABC נתון כי $AB=AC$. על הצלע AB בוחרים נקודה D כך ש-$AD=CD=BC$. חשב במעלות את גודלה של זווית הראש $\angle A$.

פיתרון



נסמן את זווית הראש $\angle A=\alpha$. נתון כי $AD=CD$, ומן המשפט שמול צלעות שוות נמצאות זוויות שוות נקבל $\angle ACD=\alpha$. מאותה סיבה $\angle B=\angle C$. על פי משפט, סכום הזוויות במשולש הוא $180°$ ולכן $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. נציב $\angle A=\alpha$ ונקבל $\angle B=\angle C=90°-\frac{\alpha}{2}$. נתון גם כי $CD=BC$, מה שאומר שמשולש BCD הוא גם כן שווה שוקיים. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות ולכן $\angle BDC=90°-\frac{\alpha}{2}$. על פי משפט, זווית חיצונית שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה וכך נקבל את המשוואה $\alpha+\alpha=90°-\frac{\alpha}{2}$. מפתרון משוואה זו נקבל $\boxed{\alpha=36°}$.

שאלה רביעית

פתור את המשוואה $\log(x-1)+\log(x+1)=1+\log 7-\log 2$.

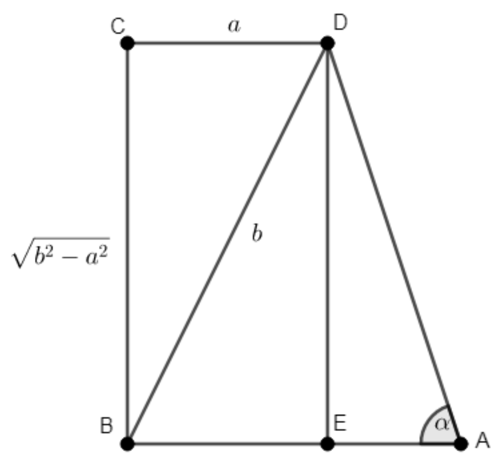
פתרון

ראשית נשים לב שאם x הוא פתרון של המשוואה, אזי $x>1$, זאת כיוון שפונקציית הלוגריתם מוגדרת רק עבור ארגומנט חיובי. בקונטקסט של מתמטיקה קדם־אקדמית, כאשר לא מציינים במפורש מהו בסיס הלוגריתם, הכוונה היא לבסיס 10. כידוע $\log 10=1$. לכן נירשום $\log(x-1)+\log(x+1)=\log 10+\log 7-\log 2$. על פי חוקי לוגריתמים $\log a+\log b=\log ab$ וכן $\log a-\log b=\log\frac{a}{b}$. לכן נקבל $\log((x-1)(x+1))=\log\frac{10\cdot 7}{2}$. מחד־חד־ערכיות של פונקציית הלוגריתם נקבל $(x-1)(x+1)=35$. נפתח סוגריים ונעביר אגף כדי לקבל $x^2=36$. מכיוון שאנו תחת המיגבלה $x>1$, הפיתרון היחיד הוא $\boxed{x=6}$.

שאלה חמישית

בטרפז ישר זווית $ABCD$, $\angle B=\angle C=90°$, הבסיס הקטן $CD=a$, האלכסון $BD=b$ וכן $\angle A=\alpha$. הבע את אורך הבסיס AB באמצעות הפרמטרים a,b,α.

פתרון



ממשפט פתגורס נקבל $BC=\sqrt{b^2-a^2}$. נוריד אנך DE מנקודה D לבסיס AB. במרובע $BCDE$ ישנן שלוש זוויות ישרות ולכן הוא מלבן. מכיוון שצלעות נגדיות במלבן הן שוות נסיק כי $BE=a$, $DE=\sqrt{b^2-a^2}$. משולש ADE הוא ישר זווית ולכן $\frac{DE}{AE}=\tan\alpha$, כלומר $AE=\cot\alpha\cdot\sqrt{b^2-a^2}$. מכיוון ש־$AB=BE+AE$, נקבל את התשובה $AB=a+\cot\alpha\cdot\sqrt{b^2-a^2}$.

שאלה ששית

האם הביטוי $3 \cdot 2^{-2\sqrt{3}} - 9 \cdot 2^{-\sqrt{3}} + 7$ הוא חיובי או שלילי? נמק את תשובתך.

פיתרון

נתבונן בפונקציה הריבועית $f(x) = 3x^2 - 9x + 7$. נחשב את הדיסקרימיננטה $9^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -3$, כלומר לפולינום $f(x)$ אין שורשים ולכן הוא חיובי עבור כל ערך של x ובפרט עבור $x = 2^{-\sqrt{3}}$.